

## 令和6年度後期日程入学試験問題

# 総合問題

## 理学部

### 注意事項

- ① 試験開始の指示があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- ② 問題冊子は、7ページ(表紙、白紙を除く)です。試験開始後、確認しなさい。
- ③ 解答は、別紙の解答用紙に記入しなさい。
- ④ 受験番号は、解答用紙の指定の欄に用紙ごとに正しく記入しなさい。

**1** 以下の問に答えよ。解答は導出過程も含めて記述せよ。

問 1 次の(1)から(3)の定積分を求めよ。

$$(1) \int_{-1}^1 x^3(x+2)^2 dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin 2\theta d\theta$$

$$(3) \int_2^4 \frac{2}{x^2-1} dx$$

問 2  $t$  を変数とする関数として,  $v(t) = 5(1 - te^{-2t})$  と定義する。次の(1)から(3)に答えよ。

- (1)  $t > 0$  のとき, 不等式  $e^t > 1 + t + \frac{t^2}{2}$  を証明せよ。
- (2) (1)の結果を利用して,  $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t} = 0$  を示し,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} v(t)$  を求めよ。
- (3) 不定積分  $\int v(t) dt$  を求めよ。

2

質量  $m$  の小物体 A をのせた質量  $M$  の板状の物体 B を水平な床の上に置き、  
図 1 に示すように、ばね定数  $k$  の軽くて丈夫なばねで壁とつなぐ。ばねはたるむ  
ことなく水平を保ちながら直線上を伸縮する。水平右向きに床に固定された  $x$  軸  
をとり、ばねの右端の位置を  $x$  とし、ばねが自然の長さである状態を  $x = 0$  とす  
る。床はなめらかで B との間に摩擦力ははたらかないが、A と B が接する面  
では静止摩擦係数  $\mu$  と動摩擦係数  $\mu'$  ( $\mu > \mu'$ ) の摩擦力がはたらく。ばねの自然  
の長さは十分大きく、ばねの長さが 0 になることはない。また、空気抵抗は無視で  
きるものとする。重力加速度の大きさを  $g$  として、以下の問に答えよ。解答は  
導出過程も含めて記述せよ。

問 1 ばねが自然の長さで A と B がともに静止している状態(図 1)から、A を  
のせた B に外力を加え、図 2 のように  $x = L_0$  ( $L_0 > 0$ ) に静止させた。B を  
移動させる間、A は B の上面ですべることなく B とともに移動した。この  
状態から B を静かに放したところ、B は単振動を始め、A はすべることな  
く B とともに振動した。以下の(1)から(3)では、 $m$ ,  $M$ ,  $k$ ,  $\mu$ ,  $\mu'$ ,  $g$ ,  $L_0$  か  
ら必要なものを用いて解答せよ。

- (1) 外力がした仕事を求めよ。
- (2) 単振動の周期を求めよ。
- (3) このような運動が実現するために、 $L_0$  が満たすべき値の範囲を求め  
よ。

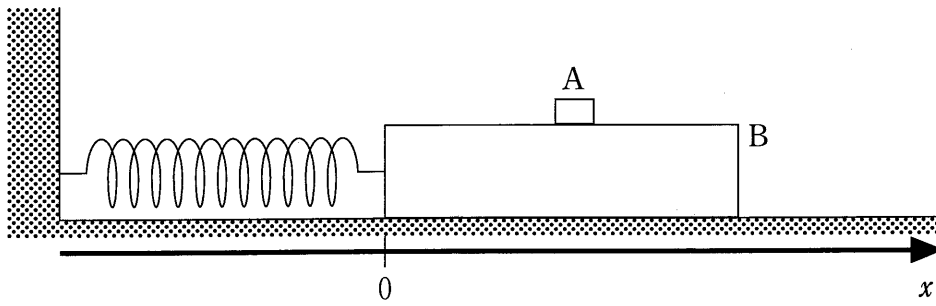


図1 ばねにより壁につながれた静止した物体

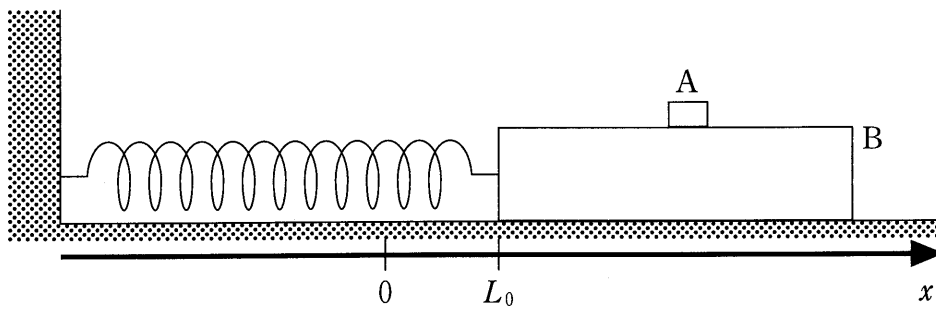


図2 ばねを自然の長さから  $L_0$  だけ伸ばし静止させた状態

問 2 次に、図 1 の状態から、A をのせた B に外力を加え、図 3 のように  $x = L_1$  ( $L_1 > L_0$ ) に静止させた。この状態から B を静かに放したところ、B は A をのせたまま運動を始めた。A は、B が運動を始めると同時に B の上面をすべり始めたが、B と速度が等しくなった時点ですべりが止まり、それ以降はすべることなく B と一体となって単振動を続けた。A が B の上面をすべった距離は  $d$  であった。以下の(1)から(3)では、 $m$ 、 $M$ 、 $k$ 、 $x$ 、 $\mu$ 、 $\mu'$ 、 $g$ 、 $L_1$ 、 $d$  から必要なものを用いて解答せよ。

- (1) A が B の上面をすべっている間の任意の時刻での、 $x$  軸に対する A と B の加速度を、それぞれ  $a$ 、 $b$  とする。そのときのばねの右端の位置  $x$  と  $a$ 、 $b$  の間には、以下の 2 つの等式が成り立つ。

$$ma = \boxed{\quad (\text{ア}) \quad}$$

$$Mb = \boxed{\quad (\text{イ}) \quad}$$

(ア)、(イ)に当てはまる式を書け。

- (2) 図 3 の状態から A が B と一体となって振動し始めるまでの間に、失われる力学的エネルギーの大きさを求めよ。
- (3) A と B が一体となって振動しているときの、振動の中心における B の速度の大きさ(速さ)を求めよ。

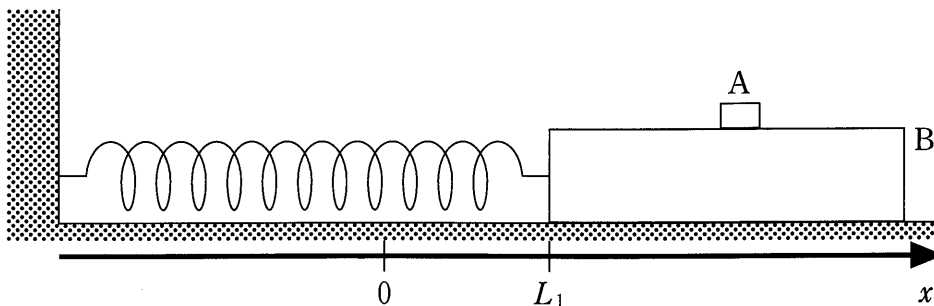


図 3 ばねを自然の長さから  $L_1$  だけ伸ばし静止させた状態

**3** 長さ  $L$  [m], 断面積  $S$  [m<sup>2</sup>] の導線の両端に電圧  $V$  [V] を加えると, 導線内部には一様な電場 (電界) ができる。この導線中の自由電子の運動について考える。自由電子 1 個の電気量の大きさ (電気素量) を  $e$  [C] ( $e > 0$ ), その質量を  $m$  [kg] とし、以下の問に答えよ。解答は導出過程も含めて記述せよ。

問 1 以下の(1), (2)について,  $L, S, V, e, m$  から必要なものを用いて解答せよ。

- (1) 導線内部に生じる一様な電場の大きさを求めよ。
- (2) 導線中の 1 個の自由電子が電場以外から力を受けないとき, その電子の加速度の大きさを求めよ。

問 2 問 1 のように, はじめに静止していた 1 個の自由電子に電場を与えると自由電子は加速する。しかし実際には, 自由電子は熱振動 (熱運動) する陽イオンとの衝突により減速し, 加速と減速を繰り返しながら移動する。自由電子は電場と平行な直線上を移動するものとし, はじめ静止していた自由電子が, 等加速度直線運動をして時間  $T$  [s] 後に速さ  $u_0$  [m/s] となった瞬間に陽イオンと衝突し, 直後の速さが 0 になるとする。このとき, 衝突直前の自由電子の速さ  $u_0$  を,  $L, S, V, e, m, T$  から必要なものを用いて表せ。

問 3 1 個の自由電子は問 2 の運動を時間  $T$  ごとに繰り返すとする。このときの自由電子の平均の速さ  $\bar{u}$  は、 $u_0$  の何倍となるか。ただし、自由電子の平均の速さ  $\bar{u}$  は、自由電子が  $T$  の間に等加速度直線運動して移動する距離を、同じ  $T$  の間に等速直線運動して移動する場合の速さであるとする。

問 4 この導線中の自由電子の個数密度(単位体積あたりの個数)を  $n$  [個/ $\text{m}^3$ ] とする。すべての自由電子が問 3 の平均の速さ  $\bar{u}$  で運動しているとしたとき、以下の(1), (2)について、 $L, S, V, e, m, T, n$  から必要なものを用いて表せ。

- (1) 導線中を流れる電流の大きさ  $I$  [A] を求めよ。
- (2) この導線の抵抗率  $\rho$  [ $\Omega \cdot \text{m}$ ] を求めよ。

問 5 導線の抵抗率  $\rho = 1.6 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ 、自由電子の個数密度  $n = 8.4 \times 10^{28}$  個/ $\text{m}^3$  であるとき、1 個の自由電子が陽イオンと 1 秒間に何回衝突するかを求めよ。ただし、 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ 、 $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{kg}$  として、有効数字一桁で答えよ。